Całka niewłaściwa

Anna Bahyrycz

Definicja 1

Załóżmy, że funkcja f jest określona na przedziale $[a,+\infty)$ i dla dowolnego $\beta \in (a,+\infty)$ istnieje całka Riemanna

$$\int_a^\beta f(x)dx.$$

Całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju funkcji f na przedziale $[a,+\infty)$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{\beta\to+\infty} \int_a^\beta f(x)\, dx.$$

Jeżeli granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa, to mówimy że całka niewłaściwa funkcji f na $[a,+\infty)$ jest zbieżna. Jeżeli granica ta jest równa $+\infty$ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest rozbieżna odpowiednio *do $+\infty$ lub $-\infty$.*
W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna.
Analogicznie definiuje się całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju funkcji f na przedziale $(-\infty,b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{\alpha\to-\infty} \int_\alpha^b f(x)\, dx.$$

Całka niewłaściwa pierwszego rodzaju

Do tej pory, gdy mówiliśmy o całkach oznaczonych, to przyjmowaliśmy, że funkcja f (z której liczymy całkę) jest ograniczona na przedziale $[a,b]$. Zazwyczaj liczyliśmy całki oznaczone z funkcji ciągłych, z których całki Riemanna na przedziale domkniętym zawsze istnieją. Teraz zajmiemy się całkami niewłaściwymi. Zaczniemy od całek niewłaściwych pierwszego rodzaju, czyli takich, że granicą całkowania jest $-\infty$ lub $+\infty$.

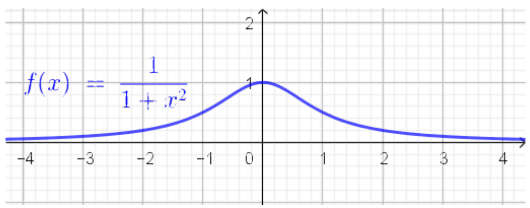
Przykład 1

Korzystając z definicji zbadać zbieżność całki:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_0^\beta \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{\beta\to+\infty} \left[\mathrm{arctgx}\right]_0^\beta$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} (\mathrm{arctg}\beta - \mathrm{arctg}0) = \frac{\pi}{2}$$

Zatem rozważana całka jest zbieżna.



Przykład 2

Korzystając z definicji zbadać zbieżność całki:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{3x-5}}dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{3x-5}}dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \Big[\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x-5)^2}\Big]_{\alpha}^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\alpha\to-\infty} \big(\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{(3\alpha-5)^2}\big) = -\infty.$$

Zatem rozważana całka jest rozbieżna do $-\infty$.

Całka niewłaściwa drugiego rodzaju

Definicja 2

Niech funkcja f określona na przedziale $(a,b]$ będzie nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a i dla dowolnego $\alpha \in (a,b)$ istnieje całka Riemanna

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx.$$

Całkę niewłaściwą drugiego rodzaju funkcji f na przedziale $(a,b]$ definiujemy wzorem:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx := \lim_{\alpha\to a^+} \int_{\alpha}^{b} f(x)\, dx.$$

Jeżeli granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa, to mówimy, że całka niewłaściwa funkcji f na $(a,b]$ jest zbieżna. Jeżeli granica ta jest równa $+\infty$ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest rozbieżna odpowiednio do $+\infty$ lub $-\infty$.
W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna.
Analogicznie definiuje się całkę niewłaściwą drugiego rodzaju funkcji f na przedziale $[a,b)$ nieograniczonej tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu b :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx := \lim_{\beta\to b^-} \int_{a}^{\beta} f(x)\, dx.$$

Przykład 3

Dla ustalonej liczby $a > 0$, w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$, zbadać zbieżność całki:

$$I_p = \int_{a}^{\infty} \frac{1}{x^p}dx.$$

Ponieważ $$\int \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}x^{1-p} + C & \textit{dla } p \neq 1 \\ \ln|x| + C & \textit{dla } p = 1 \end{cases},$$

więc rozważmy przypadki:

- $p = 1$

$$\int_{a}^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_{a}^{\beta} \frac{1}{x}dx = \lim_{\beta\to+\infty} (\ln\beta - \ln a) = +\infty$$

- $p \neq 1$

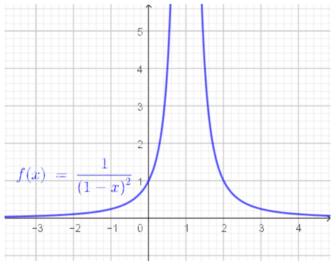
$$\int_{a}^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{\beta\to+\infty} \frac{1}{1-p}(\beta^{1-p} - a^{1-p}) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}a^{1-p} & \textit{dla } p > 1 \\ +\infty & \textit{dla } p < 1 \end{cases}.$$

Zatem I_p jest zbieżna dla $p > 1$ i rozbieżna do $+\infty$ dla $p \leq 1$.

Przykład 4

Korzystając z definicji zbadać zbieżność całki:

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{(x-1)^2}dx$$



Zauważmy, że ponieważ $\lim_{x\to1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$, więc funkcja podcałkowa jest nieograniczona w lewostronnym sąsiedztwie 1.

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{\beta\to1^-} \int_{0}^{\beta} \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{\beta\to1^-} \Big(\frac{1}{1-\beta} - 1\Big) = +\infty$$

Zatem rozważana całka jest rozbieżna do $+\infty$.

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int t^{-2}dt = -t^{-1} + C = -\frac{1}{x-1} + C, \quad t = x-1$$

Przykład 5

Korzystając z definicji zbadać zbieżność całki:

$$\int_{\frac{5}{3}}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{3x-5}}dx = \lim_{\alpha\to\frac{5}{3}^+} \int_{\alpha}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{3x-5}}dx = \lim_{\alpha\to\frac{5}{3}^+} \left[\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x-5)^2}\right]_{\alpha}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\alpha\to\frac{5}{3}^+}(1-\sqrt[3]{(3\alpha-5)^2}) = \frac{1}{2}.$$

Zatem rozważana całka jest zbieżna do $\frac{1}{2}$.

Definicja 3

Załóżmy, że funkcja f *jest określona na przedziale* (a,b) *gdzie* $a,b \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. *Jeżeli dla pewnego* $c \in (a,b)$ *istnieją całki niewłaściwe funkcji* f *w przedziałach* $(a,c]$ *i* $[c,b)$ *to całkę niewłaściwą funkcji* f *w przedziale* (a,b) *określamy jako*

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

o ile wyrażenie po prawej stronie ma sens.

Uwaga 1

Definicja powyższa nie zależy od wyboru punktu c.

Przykład 6

Dla ustalonej liczby $a > 0$, *w zależności od parametru* $p \in \mathbb{R}$, *zbadać zbieżność całki niewłaściwej drugiego rodzaju:*

$$I_p = \int_0^a \frac{1}{x^p}dx.$$

Ponieważ $$\int \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}x^{1-p}+C & \text{dla } p\neq 1 \\ \ln|x|+C & \text{dla } p=1 \end{cases},$$

więc rozważmy przypadki:

- $p = 1$

$$\int_0^a \frac{1}{x}dx = \lim_{\alpha\to 0^+}\int_\alpha^a \frac{1}{x}dx = \lim_{\alpha\to 0^+}(\ln a - \ln\alpha) = +\infty$$

- $p \neq 1$

$$\int_0^a \frac{1}{x^p}dx = \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1}{1-p}(a^{1-p}-\alpha^{1-p}) = \begin{cases} \frac{1}{1-p}a^{1-p} & \text{dla } p<1 \\ +\infty & \text{dla } p>1 \end{cases}.$$

Zatem I_p *jest zbieżna dla* $p < 1$ *i rozbieżna do* $+\infty$ *dla* $p \geq 1$.

Przykład 7

Korzystając z definicji zbadać zbieżność całki:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\left[\mathrm{arctgx}\right]_{\alpha}^{0} = \lim_{\alpha\to-\infty}(0-\mathrm{arctg}\alpha) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx \lim_{\beta\to+\infty}\int_{0}^{\beta}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\left[\mathrm{arctgx}\right]_{0}^{\beta} = \lim_{\beta\to+\infty}(\mathrm{arctg}\beta-0) = \frac{\pi}{2}$$

Zatem rozważana całka jest zbieżna i równa π.

W powyższym przykładzie możemy również skorzystać z parzystości funkcji podcałkowej

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = 2\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Twierdzenie 1 (I kryterium porównawcze zbieżności całki)

Niech $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, $b \in (-\infty, \infty]$ $(f, g : (a, b] \to \mathbb{R},\ a \in [-\infty, \infty))$ *spełniają nierówność* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *dla* $x \in [a, b)$ $(x \in (a, b])$. *Wówczas*

1. *jeśli całka* $\int_a^b g(x)dx$ *jest zbieżna, to całka* $\int_a^b f(x)dx$ *jest zbieżna,*
2. *jeśli całka* $\int_a^b f(x)dx$ *jest rozbieżna, to całka* $\int_a^b g(x)dx$ *jest rozbieżna.*

Twierdzenie 2 (II kryterium porównawcze – asymptotyczne)

Niech $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, $b \in (-\infty, \infty]$ $(f, g : (a, b] \to \mathbb{R},\ a \in [-\infty, \infty))$ *będą funkcjami nieujemnymi albo niedodatnimi.*
Jeśli istnieje $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = K \in (0, \infty)$ $(\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = K \in (0, \infty))$,
to całki $\int_a^b g(x)dx$, $\int_a^b f(x)dx$ *są równocześnie zbieżne albo rozbieżne.*

Definicja 4

Mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)dx$ *jest* *bezwzględnie zbieżna* *jeśli zbieżna jest całka* $\int_a^b |f(x)|dx$, *warunkowo zbieżna* *jeśli całka* $\int_a^b f(x)dx$ *jest zbieżna, a całka* $\int_a^b |f(x)|dx$ *rozbieżna.*

Twierdzenie 3

Jeżeli całka niewłaściwa jest bezwzględnie zbieżna, to jest zbieżna. Ponadto

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Przykład 8

Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całki:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg} x}{x^3 + 1} dx.$$

Możemy skorzystać z I-ego lub II-ego kryterium porównawczego.

- *Z I-ego kryterium porównawczego:*

  $$\text{ponieważ} \quad 0 < \frac{\mathrm{arctg} x}{x^3 + 1} < \frac{\frac{\pi}{2}}{x^3} \quad \text{dla} \quad x \geq 1 \quad \text{oraz} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \quad \text{jest zbieżna,}$$

  to stąd wnioskujemy, że rozważana całka jest zbieżna.
- *Z II-ego kryterium porównawczego:*

  $$\text{ponieważ} \quad \frac{\mathrm{arctg} x}{x^3 + 1} > 0 \ \text{ i } \ \frac{1}{x^3} > 0 \ \text{ dla } \ x \geq 1 \quad \text{oraz}$$

  $$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\mathrm{arctg} x}{x^3+1}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \mathrm{arctg} x \cdot \frac{x^3 + 1}{x^3} = \frac{\pi}{2},$$

  to stąd wnioskujemy, że rozważana całka jest zbieżna.

Przykład 9

Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną całki:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx.$$

$$\text{Ponieważ} \quad 0 \leq \left| \frac{\sin^3 x}{x^2} \right| < \frac{1}{x^2} \quad \text{dla} \quad x \geq 1 \quad \text{oraz} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad \text{jest zbieżna,}$$

to stąd wnioskujemy, na podstawie I-ego kryterium porównawczego, że całka

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin^3 x}{x^2} \right| dx$$

jest zbieżna, co oznacza, że rozważana całka jest bezwzględnie zbieżna. Ze zbieżności bezwzględnej całki (zobacz Twierdzenie 3) wynika zbieżność, zatem rozważana całka jest także zbieżna.

Zauważmy, że do funkcji $\frac{\sin^3 x}{x^2}$ dla $x > 1$ nie możemy bezpośrednio zastosować kryterium porównawczego, gdyż funkcja ta przyjmuje zarówno wartości dodatnie jak i ujemne - założenia zarówno I-ego i II-ego kryterium porównawczego nie są spełnione.